EXEMPLE DE SUJET MATHS / INFO (*)

Sujet 1

Les deux exercices sont obligatoires et indépendants.

Exercice 1

On pose, pour x dans $[0, 1]$, et n dans $\mathbf{N}^*$:

$$f_n(x) = (-1)^n \left(\frac{x^2 + n}{n^2} \right).$$

1. Démontrer que, pour tout x dans $[0; 1]$, la série $\sum f_n(x)$ converge .
2. Étudier la convergence absolue de la série $\sum f_n$ en chacun des points de $[0, 1]$.
3. La série converge-t-elle normalement sur $[0, 1]$?

Exercice 2

On note P le polynôme à cœfficients entiers suivant.

$$2\mathrm{X}^5 - 4\mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} - 4$$

1. (a) Déterminer le nombre a tel que le polynôme $(\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - 1 - \sqrt{2})$ soit à cœfficients dans $\mathbf{Z}$.

   (b) En déduire la valeur de P en $1 + \sqrt{2}$.
   On pourra effectuer une division euclidienne de polynômes.

2. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice unité de taille 2×2.
   Déterminer les valeurs propres de A et en déduire le calcul de la matrice

$$2\mathrm{A}^5 - 4\mathrm{A}^4 - 2\mathrm{A}^3 + 3\mathrm{A}^2 - 5\mathrm{A} - 4\mathrm{I}.$$

Corrigé du Sujet 1

Corrigé de l'exercice 1

1. Soit x dans $[0,1]$.

   Hypothèse 1 : $\sum f_n(x)$ est une série alternée.

   Hypothèse 2 : $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{n^2} + \dfrac{1}{n}$ est le terme d'une suite décroissante (somme de termes de suites positives décroissantes).

   Hypothèse 3 : $|f_n(x)|$ est le terme d'une suite convergeant vers 0 (somme de termes de suite convergeant vers 0).

   On applique ensuite le théorème spécial des séries alternées.

2. Soit x dans $[0,1]$.
   $|f_n(x)| = x^2 \times \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n}$ donc $\sum |f_n(x)|$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente, par utilisation des séries de Riemann.

3. Il existe un réel x dans $[0,1]$ pour lequel $\sum f_n(x)$ ne converge pas absolument. Donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

Corrigé de l'exercice 2

1. (a) $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-1-\sqrt{2}) = \mathrm{X}^2 - (a+1+\sqrt{2})\mathrm{X} + a(1+\sqrt{2})$. Donc le polynôme est à cœfficients dans $\mathbf{Z}$ si et seulement s'il existe un entier k tel que $a = \dfrac{k}{1+\sqrt{2}} = k(\sqrt{2}-1)$ et $a+1+\sqrt{2} = \sqrt{2}(k+1)+1$ est un entier. Il vient $k=-1$ et $a = 1-\sqrt{2}$.

   (b) La division euclidienne de P par $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} - 1$ peut s'écrire :

   $$\begin{array}{rrr|l} 2\mathrm{X}^5 - 4\mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^3 + & 3\mathrm{X}^2 & -5\mathrm{X}-4 & \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} - 1 \\ \cline{4-4} & 3\mathrm{X}^2 & -5\mathrm{X}-4 & 2\mathrm{X}^3 + 3 \\ & & \mathrm{X}-1 & \end{array}$$

   Donc $\tilde{\mathrm{P}}(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2}) - 1 = \sqrt{2}$.

2. A est diagonalisable car symétrique réelle. De plus, la somme de ses lignes est constante et vaut $1+\sqrt{2}$, de vecteur propre associé $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Donc les valeurs propres sont $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$, de vecteur propre associé $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ (orthogonal au premier).

   La matrice orthogonale $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$, notée Q vérifie donc : $\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}\mathrm{QD}{}^t\mathrm{Q}$, avec $\mathrm{D} = \begin{pmatrix}1+\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

   On obtient par calcul matriciel :

   $$\begin{aligned} 2\mathrm{A}^5 - 4\mathrm{A}^4 - 2\mathrm{A}^3 + 3\mathrm{A}^2 - 5\mathrm{A} - 4\mathrm{I} &= \frac{1}{2}\mathrm{Q}\begin{pmatrix}\tilde{\mathrm{P}}(1+\sqrt{2}) & 0\\ 0 & \tilde{\mathrm{P}}(1-\sqrt{2})\end{pmatrix}{}^t\mathrm{Q} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Q}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}{}^t\mathrm{Q} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

EXEMPLE DE SUJET MATHS / PHYSIQUE

Sujet 9

Les deux exercices sont obligatoires et indépendants.

Exercice 1

Soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (-x + 2z, -2x + y + 2z, z) \end{aligned}$$

1. Déterminer $\ker f$, $\ker(f + \mathrm{Id})$ et $\ker(f - \mathrm{Id})$ après avoir vérifié que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
2. En déduire la nature géométrique et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 2

On pose, sous réserve d'existence,

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

1. En utilisant le changement de variable : $t = \dfrac{\pi}{2} - x$, montrer que I existe si et seulement si J existe.
2. Montrer que $x \longmapsto \ln(\sin x)$ est intégrable sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. En calculant $\mathrm{I} + \mathrm{J}$, montrer : $\mathrm{I} = -\dfrac{\pi \ln 2}{2}$.

Corrigé du Sujet 9

Corrigé de l'exercice 1

1. En posant $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} -x+2z \\ -2x+y+2z \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
   l'égalité : $f(x,y,z) = (-x+2z, -2x+y+2z, z)$ se traduit matriciellement par : $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$. Donc f est une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$. Donc f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
   On calcule et on interprète les noyaux demandés à l'aide du calcul matriciel.

$$(x,y,z) \in \ker f \iff \begin{cases} -x+2z & = 0 \\ -2x+y+2z & = 0 \\ z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \\ z & = 0 \end{cases} \text{ donc } \ker f = \{(0,0,0)\}.$$

$$(x,y,z) \in \ker(f+\mathrm{Id}) \iff \begin{cases} -x+2z & = -x \\ -2x+y+2z & = -y \\ z & = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x & = x \\ y & = x \\ z & = 0 \end{cases} \text{ donc } \ker(f+\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{(1,1,0)\}.$$

$$(x,y,z) \in \ker(f-\mathrm{Id}) \iff \begin{cases} -x+2z & = x \\ -2x+y+2z & = y \\ z & = z \end{cases} \iff \begin{cases} x & = x \\ y & = y \\ z & = x \end{cases} \text{ donc } \ker(f-\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{(1,0,1),(0,1,0)\}.$$

2. Pour tout a, b et c dans $\mathbf{R}$, l'égalité : $a(1,1,0)+b(1,0,1)+c(0,1,0) = (0,0,0)$ implique $b = 0$, puis $a = 0$, puis $c = 0$.
   Donc la famille $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,0)\}$ est libre dans $\mathbf{R}^3$.
   L'ensemble $((1,1,0),(1,0,1),(0,1,0))$ est une base de $\mathbf{R}^3$ comme famille ordonnée de cardinal 3 et libre dans $\mathbf{R}^3$.
   Donc f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ vérifiant : $\mathrm{R}^3 = \ker(f+\mathrm{Id}) \oplus \ker(f-\mathrm{Id})$.
   Donc f est la symétrie de R^3 par rapport à l'espace $\ker(f-\mathrm{Id})$, parallèlement à $\ker(f+\mathrm{Id})$.

Corrigé de l'exercice 2

1. Sous réserve d'existence des deux intégrales, on a : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos t\,\mathrm{d}t.$
   Donc I existe si et seulement si J existe.
2. La fonction $x \longmapsto \ln(\sin x)$ est continue et négative sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
   De plus, pour $x > 0$ au voisinage de 0, on a :
$$\ln(\sin x) = \ln\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right) = \ln x + \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2)\right) = \ln x - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2).$$
   Du théorème des croissances comparées, on déduit : $\ln(\sin x) \underset{0^+}{\sim} \ln x$.
   Or, ln est intégrable au voisinage de 0.
   Donc, par comparaison de fonctions intégrables et de signe constant au voisinage de 0, on peut affirmer que $x \longmapsto \ln(\sin x)$ est intégrable sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
3. Les deux intégrales existent et :
$$\mathrm{I}+\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x \sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln((\sin 2x)/2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1/2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u - \frac{\pi\ln 2}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u - \frac{\pi\ln 2}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{I} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)\mathrm{d}t - \frac{\pi\ln 2}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{I} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t - \frac{\pi\ln 2}{2} = \frac{1}{2}(\mathrm{I}+\mathrm{J}) - \frac{\pi\ln 2}{2}$$
   Or, d'après la question 1, on a : $\mathrm{I} = \mathrm{J}$. Donc $\mathrm{I} = \frac{1}{2}(\mathrm{I}+\mathrm{J}) = -\frac{\pi\ln 2}{2}$.